

Függvények határértéke, folytonossága

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI, SZÉLSŐÉRTÉK FELADATOK
MEGOLDÁSA

Alapvető fogalmak:

- ▶ Függvény fogalma
- ▶ Függvény helyettesítési értéke (függvényérték)
- ▶ Függvény grafikonja
 - ▶ A grafikon az $(x; f(x))$ pontok halmaza a koordinátasíkon.

Függvények tulajdonságai

- ▶ Értelmezési tartomány (Domain = tartomány: D_f)
- ▶ Értékkészlet (Range= terjedelelem: R_f)
- ▶ Menet
- ▶ Zérushely
- ▶ **Szélsőérték**
- ▶ Paritás
- ▶ Periodicitás
- ▶ Korlátosság
- ▶ **Görbület**
- ▶ **Folytonosság**

Totális és lokális szélsőérték:

- ▶ Totális szélsőérték:

- ▶ **Definíció:** Az f függvénynek maximuma van a változó x_1 értékénél, ha az ott felvett $f(x_1)$ értéknél nagyobbbat sehol sem vesz fel a függvény.
- ▶ **Definíció:** Az f függvénynek minimuma van a változó x_2 értékénél, ha az ott felvett $f(x_2)$ értéknél kisebbbet sehol sem vesz fel a függvény.

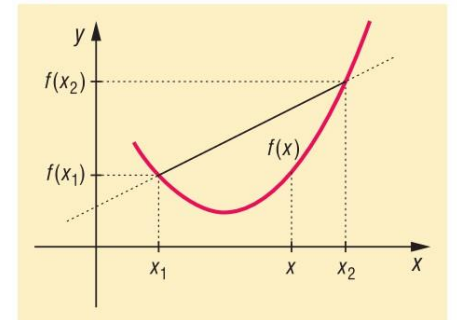
- ▶ Lokális (helyi) szélsőérték:

- ▶ **Definíció:** Az f függvénynek helyi maximuma van a változó x_1 értékénél, ha az x_1 -nek van olyan környezete, amelyben teljesül, hogy az ott felvett $f(x_1)$ értéknél nagyobbbat nem vesz fel a függvény.
- ▶ **Definíció:** Az f függvénynek helyi minimuma van a változó x_2 értékénél, ha az x_2 -nek van olyan környezete, amelyben teljesül, hogy az ott felvett $f(x_2)$ értéknél kisebbbet nem vesz fel a függvény.

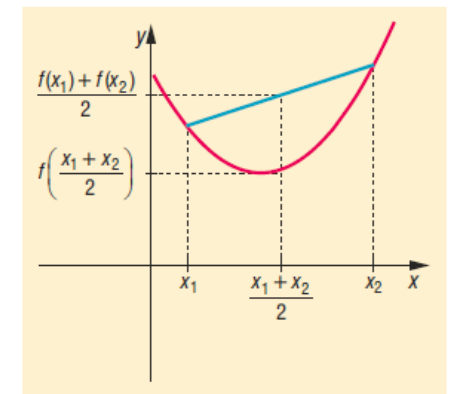
Görbület: konvex függvény

- ▶ A függvénygörbe alakja lehet konvex vagy konkáv.
- ▶ **Definíció:** Az $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallumon konvex, ha a függvény értelmezve van $[a;b]$ -n és grafikonja bármely két pontjában felvett függvényértékeket összekötő szakasz alatt van.
- ▶ **Definíció:** A függvényt az $[a;b]$ intervallumon konvexnek nevezzük, ha az intervallum bármely két x_1, x_2 pontjára teljesül, hogy $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ egyenlőtlenség.

Ha $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ teljesül, akkor szigorúan konvex függvényről beszélünk.



19. ábra

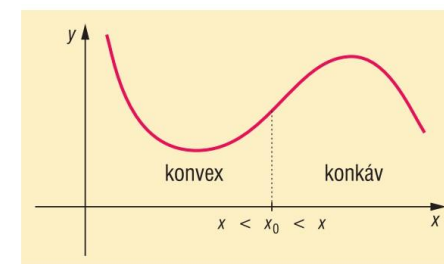


Görbület: konkáv függvény és inflexiós pont:

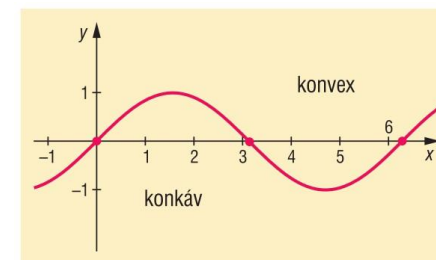
- **Definíció:** Az $f(x)$ függvény az $[a;b]$ intervallumon konkáv, ha a függvény értelmezve van $[a;b]$ -n és grafikonja bármely két pontjában felvett függvényértékeket összekötő szakasz felett van.
- **Definíció:** A függvényt az $[a;b]$ intervallumon konkávnak nevezzük, ha az intervallum bármely két x_1, x_2 pontjára teljesül, hogy $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ egyenlőtlenség.

Ha $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ teljesül, akkor szigorúan konkáv függvényről beszélünk.

- **Definíció:** Az $f(x)$ függvénynek értelmezési tartománya x_0 pontjában inflexiós pontja van, ha van az x_0 -nak olyan jobb, illetve bal oldali környezete, hogy az egyikben a függvény konvex, a másikban pedig konkáv.
 - Az inflexió magyarul elhajlást, irányváltoztatást jelent.
 - A szinuszfüggvény váltogatja a konvex-konkáv tulajdonságot, végtelen sok inflexiós pontja van ($x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$).



21. ábra



22. ábra

Szélsőérték feladatok:

Másodfokú függvény szélsőértékének felhasználásával megoldható feladatok:

1. Bontsunk fel egy 12 cm hosszúságú szakaszt két részre úgy, hogy maximális illetve minimális legyen
 - a) maximális legyen a részek hosszúságának szorzata;
 - b) minimális legyen a részek fölé rajzolt négyzetek területének a különbsége;
 - c) minimális legyen a részek fölé rajzolt szabályos háromszögek területének az összege;
 - d) maximális legyen a részek fölé rajzolt félkörök kerületének az összege.
2. Egy folyó partján 400 méter hosszú kerítéssel maximális téglalap alapú területet szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a folyó felől nincs kerítés. Mekkora legyenek a téglalap oldalai?
3. Egy tetőtér keresztmetszete egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja 12 méter, magassága 8 méter. Legfeljebb mekkora téglalap lehet a tetőtérbe épített szoba keresztmetszete?

Házi feladatok:

1. Van-e az adott területű téglalap átlójának maximális és minimális értéke? Ha van, határozzuk meg.
2. Egy nem szimmetrikus tetőtér keresztmetszete egy 6 méter, 8 méter és 10 méter oldalakkal rendelkező háromszög. A 10 méteres oldal a tetőtér alapja. Legfeljebb mekkora területű téglalap lehet a tetőtérbe beépített szoba keresztmetszete?

Versenyfeladatok:

Keressük meg az összes olyan, a valós számokon értelmezett folytonos $f(x)$ függvényt, amely kielégíti az alábbi függvényegyenleteket!

1. $f(x) - f(-x) = x^2$

2. $f(1 - x) + 2f(1 + x) = x + 3$

3. $f(x^2 + x + 1) + 2f(x^2 - x + 1) = 3x^2 - x + 6$